

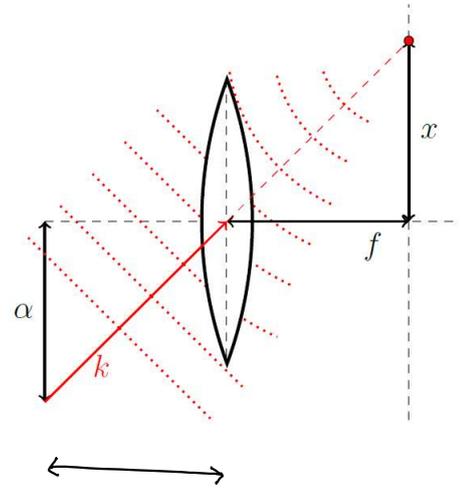
## Fourier - Optik

- Jede beliebige Feldverteilung ist durch eine Summation von ebenen Wellen darstellbar  
 ⇒ Fokussierung einer ebenen Welle durch eine Linse

- Position des Fokuspunktes

$$\frac{x}{f} = \frac{\alpha}{\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}} \approx \frac{\alpha}{k} \Rightarrow \alpha = k \frac{x}{f}$$

paraxiale Näherung



- Amplitude der Welle ist proportional zur FT der Ausgangsverteilung

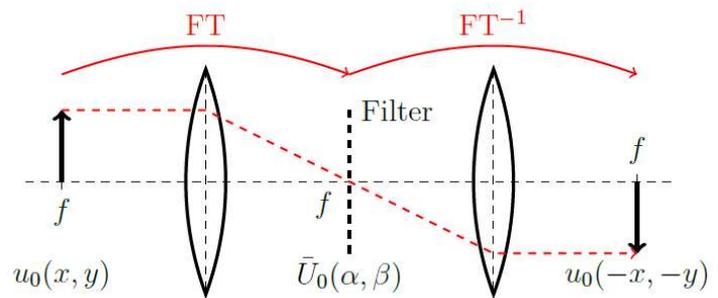
$$|U_f(x, y)|^2 = \underbrace{2\pi \left(\frac{k}{f}\right)^2}_{\text{Energieerhaltung}} \left| \bar{U}_0\left(k \frac{x}{f}, k \frac{y}{f}\right) \right|^2$$

- Phasenverteilung ist komplizierter:  $i \underbrace{e^{ik(d+f)}}_{\text{Kugelwelle}} \underbrace{\exp\left[ik \frac{(x^2+y^2)(d-f)}{2f^2}\right]}_{\text{verschwindet für } d=f}$

⇒ phasenrichtige FT für  $d=f$

### Optische FT in 4f-Anordnung:

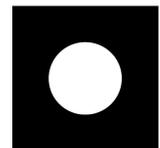
- Platzierung einer zweiten Linse zur optischen Rücktransformation
- Manipulation des Fourierspektrums durch Einsetzen von Blenden in der Brennebene



Beispiele:

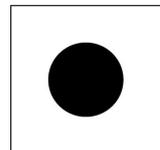
- a.) Kontrastreduktion: Hohe Frequenzkomponenten werden ausgeblendet

- ↳ Ausblenden aller  $k$ -Vektoren mit  $\alpha > \frac{ka}{f}$
- ↳ Weichzeichnen des Bildes



- b.) Kontrasterhöhung: Langwellige Frequenzkomponenten werden ausgeblendet

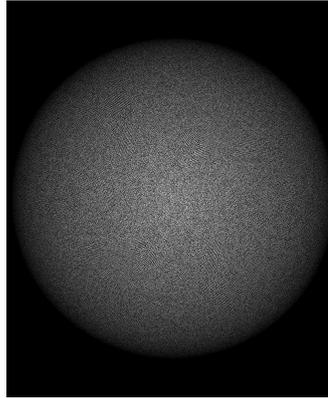
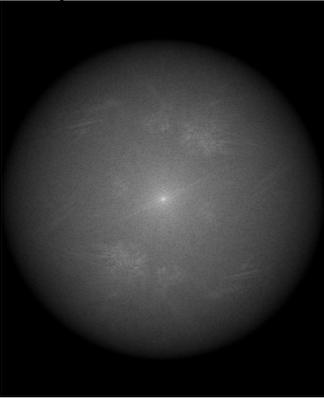
- ↳ Ausblenden aller  $k$ -Vektoren mit  $\alpha < \frac{ka}{f}$
- ↳ Kanten sind verstärkt sichtbar



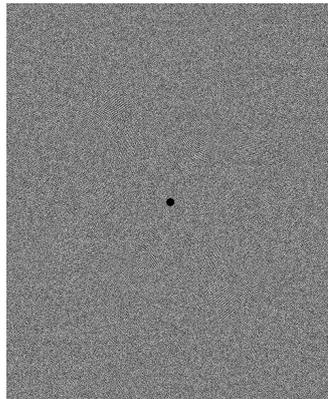
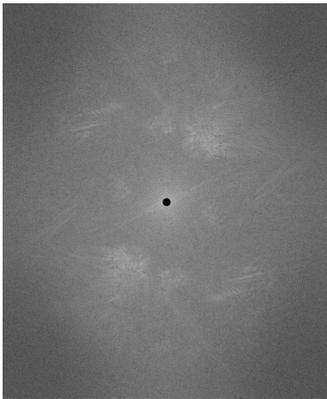
# Beispiel: FT von Fourier

Amplitude

Phase



Originalbild



## Auflösungsgrenzen

a.) **Rayleigh-Kriterium:** (Teleskope)

↳ einfallende ebene Welle mit  $\vec{k} = \alpha_0 \vec{e}_x + \beta_0 \vec{e}_y$

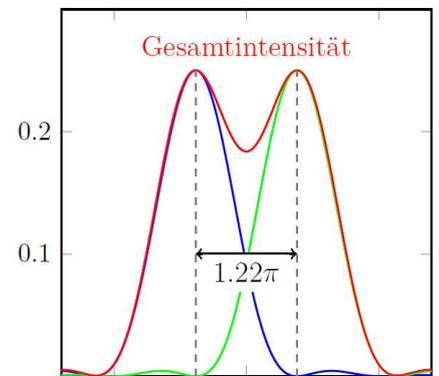
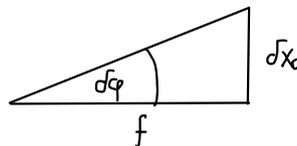
↳ sehr große Objektabstände: **Fraunhofer Näherung**

$$|U_f(x,y)|^2 \sim \left| \frac{J_1 \left( k \frac{a}{f} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right)}{k \frac{a}{f} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \right|^2 \quad \text{mit } a - \text{Objektradius am Eingang}$$

↳ verschobenes Airy-Scheibchen

↳ Zentrum des einen Objekts muss in der Nullstelle des Scheibchens des anderen Objekts liegen

$$k \frac{a}{f} \Delta x > 1,22\pi \Rightarrow \Delta\varphi > 0,61 \frac{\lambda}{a}$$



überlagerte Airy-Scheibchen

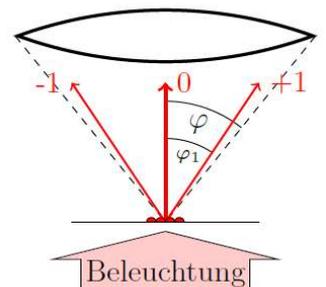
b.) **Abbe Kriterium:** (Mikroskope)

↳ für nicht-paraxiale Strahlen, 1D periodisches Gitter

$$U_0(x) = \sum_m a_m \delta(x - m \frac{2\pi}{d})$$

↳ Übertrage 1. Beugungsordnung:  $m=1 \quad \sin\varphi = \frac{\alpha}{k} = \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda_0}{nd}$

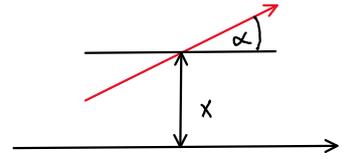
$$\Rightarrow d = \frac{\lambda_0}{n \sin\varphi}$$



# Zusammenfassung Kapitel 2 und 3

## Kapitel 2 - Strahlenoptik

↳ Beschreibung mittels Zweiervektoren  $\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}$



$$\hat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + B\alpha \\ Cx + D\alpha \end{pmatrix} \quad \text{Matrix-Formalismus}$$

Freiraum:  $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$       Sphärischer Spiegel:  $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$

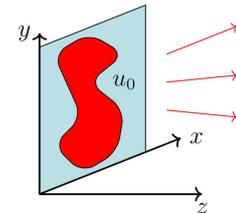
Linse:  $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$

→ Linsenschleifenformel:  $\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

→ Berechnung der Hauptebenen für ein beliebiges System:  $v = \frac{1-A}{C}$        $u = \frac{1-D}{C}$

## Kapitel 3 - Beugungsoptik

→ Beschreibung durch Felder anstatt Strahlen



$$u(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\tilde{u}_0(\alpha,\beta)}_{\substack{\text{Amplitude} \\ (\text{i. A. komplex})}} \underbrace{e^{i\sqrt{k^2-\alpha^2-\beta^2}z}}_{\substack{\text{Übertragungsfunktion} \\ \rightarrow \text{Evaneszenz oder Homogenität} \\ \text{der Wellen}}} e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

↑  
elektrisches Feld  
am Punkt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\tilde{u}_0(\alpha,\beta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x,y) e^{-i(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

↑  
ursprüngliche Feldverteilung

Gaußförmige Strahlen:  $u_0(x,y) = A_0 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right)$

→ paraxiale Näherung:  $\sqrt{k^2-\alpha^2-\beta^2} \approx k - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2k}$

Lösung:  $u(x,y,z) = \frac{e^{ikz} e^{i\varphi} A_0}{W/W_0} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W(z)^2}\right] \exp\left[i\frac{z}{z_R} - \frac{x^2+y^2}{W(z)^2}\right]$

mit  $z_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}$  Rayleigh Länge       $W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$  Strahlbreite

$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right)$  Phasenkrümmungsradius

q-Parameter:  $q = z_F - i z_R$

↳ Enthält Rayleigh-Länge, Strahlbreite und Phasenkrümmungsradius  $\frac{1}{q} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{W(z)^2}$   
 ↳ vollständige Beschreibung des Gaußstrahls

Dynamik: 
$$q_{\text{out}} = \frac{Aq_{\text{in}} + B}{Cq_{\text{in}} + D}$$

Resonatoren: Stabilitätsbedingung  $|A+D| < 2 \Leftrightarrow 0 < g_1 g_2 < 1$  Stabilitätsdiagramm

- Fabry-Pérot Resonator
- konfokaler Resonator
- konzentrischer Resonator

paraxiale Helmholtzgleichung: 
$$\left( i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right) v(x,y,z) = 0$$
 mit  $u(x,y,z) = v e^{ikz}$

↳ höhere Lasermoden: 
$$V_{mn} = \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} v = \underbrace{H_m \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right)}_{\text{Hermite Polynome}} H_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{i(n+m)\varphi} v$$

Fraunhofer Beugung: paraxiale Näherung +  $z \gg z_R$

$$u(x,y,z) \approx \frac{(2\pi)^2}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \bar{u}_0 \left( k \frac{x}{z}, k \frac{y}{z} \right)$$
 Fouriertransformation ergibt Intensitätsverteilung